ESTADO LIBRE ASOCIADO DE PUERTO RICO
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN

Unidad 9.4: Geometría Euclidiana
Matemáticas
6 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados esperados)	
Resumen de la Unidad:	En esta unidad el estudiante repasará y analizará las figuras geométricas para desarrollar justificaciones para los teoremas de la Geometría Euclidiana.

Preguntas Esenciales (PE) y Comprensión Duradera (CD)

PE1 ¿Cómo se sabe que un enunciado es cierto?

CD1 Los enunciados se estudian investigando todas las posibilidades de lógica y demostraciones.

PE2 ¿Cómo se usa el razonamiento inductivo en la vida diaria?

CD2 El razonamiento inductivo se utiliza en la vida diaria.

PE3 ¿Cómo convenzo a otros de algo con prueba válida?

CD3 La evidencia es necesaria para apoyar un argumento.

Objetivos de Transferencia (T) y Adquisición (A)

T1. El estudiante será capaz de justificar su entendimiento sobre demostraciones matemáticas, conjeturas y teorías a manera que vayan identificando figuras geométricas.

El estudiante adquiere destrezas para…

A1. Demostrar un entendimiento de los métodos de razonamiento matemáticos.

A2. Desarrollar justificaciones para teoremas básicos de la geometría euclidiana.

A3. Manipular expresiones algebraicas para resolver ecuaciones.

Los Estándares de Puerto Rico (PRCS)

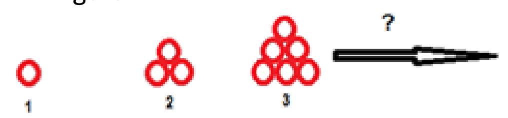
Estándar de Geometría	
9.G.11.1	Establece conjeturas basadas en la exploración de situaciones geométricas, con y sin tecnología.
9.G.11.2	Prueba, directa o indirectamente, que un enunciado matemático válido es cierto. Desarrolla un contraejemplo para refutare un enunciado inválido.
(+) 9.G.11.3	Formula e investiga la validez del inverso de un condicional.
(+) 9.G.11.4	Organiza y presenta pruebas directas y pruebas indirectas utilizando dos columnas, párrafos y diagramas de flujo.

Procesos y Competencias Fundamentales de Matemáticas (PM)

PM1	Comprende problemas a medida que desarrolla su capacidad para resolverlos con confianza.
PM2	Razona de manera concreta y semiconcreta, hasta alcanzar la abstracción cuantitativa.
PM3	Construye y defiende argumentos viables, así como comprende y critica los argumentos y el razonamiento de otros.
PM4	Utiliza las matemáticas para resolver problemas cotidianos.
PM5	Utiliza las herramientas apropiadas y necesarias (incluye la tecnología) para resolver problemas en diferentes contextos.
PM6	Es preciso en su propio razonamiento y en discusiones con otros.
PM7	Discierne y usa patrones o estructuras.
PM8	Identifica y expresa regularidad en los razonamientos repetidos.

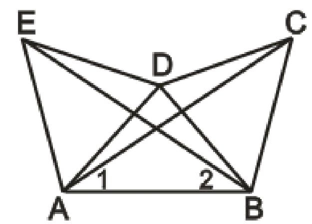
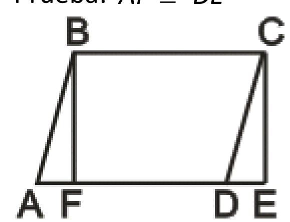
Unidad 9.4: Geometría Euclidiana
Matemáticas
6 semanas de instrucción

ESTADO LIBRE ASOCIADO DE PUERTO RICO
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN

ETAPA 1 – (Resultados deseados)			ETAPA 2 (Evidencia)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	**Enfoque de Contenido** *(El estudiante comprenderá…)*	**Dominio y Destrezas** *(El estudiante podrá …)*	**Tarea de desempeño**	**Otra evidencia**	**Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección**
PRCS: **(+)9.G.11.1** **PM:** **PM1** **PM2** **PM3** **PM4** **PM5** **PM6** **PM7** **PM8** **PE/CD:** **PE1/CD1** **PE3/CD3** **T/A:** **T1/A1** **T2/A2**	***Razonamiento*** Como establecer hipótesis a base de la exploración de situaciones geométricas.	***Formas geométricas y propiedades*** • Establecer conjeturas, dada una situación. • Refutar conjeturas utilizando un contraejemplo en los casos que haya esa posibilidad. • Aplicar el método de razonamiento inductivo en varias situaciones. • Concluir que el razonamiento inductivo no siempre lleva a conclusiones correctas (conocer las limitaciones de este razonamiento). • Utilizar contraejemplos	*Para obtener descripciones completas, favor de ver la sección 'Tareas de desempeño' al final de este mapa.* ***Evaluando conjeturas*** • En esta tarea el estudiante creará declaraciones de sus observaciones, ángulos bisectrices, o bisectrices perpendiculares de cuadriláteros. (ver abajo)	***Preguntas de ejemplo para tarea o prueba corta*** • Hacer una conjetura de cómo se verá la cuarta figura.  • Michelle quería investigar el efecto de un vértice en la gráfica $f(x) = x + 6x$ cuando $f(x)$ es remplazado por $f(x+k)$. • Michelle graficó las funciones de la forma $F(x + k)$ por $k = 1, 2, 3,$ y 4. Por cada una de las funciones que ella graficó, la coordenada x del vértice era negativo y diferente para cada valor de i, pero la coordinada -y del vértice era del mismo valor que k. Michelle hizo tres conjeturas en base a los resultados. Determina si las tres conjeturas son verdaderas. • La coordenada x del vértice depende del valor de k. • La coordenada x del vértice es negativo para todos los valores de k. • La coordenada y del vértice es independiente del valor de k. ***Diario de matemáticas (ejemplos rápidos)*** • ¿Cómo sabemos si una declaración matemática	*Para obtener descripciones completas, ver las secciones "Actividades de aprendizaje" y "Ejemplos para planes de la lección" al final de este mapa.* ***(+)La importancia de una examinación crítica*** • En este ejercicio, los estudiantes crearán una tabla con el polinomio $x = 0, 1, 2, 3$ para la ecuación $x^2 + x + 41$. Esta tabla será utilizada para responder preguntas que aplican una evaluación crítica. (ver abajo) ***(+)¿Qué es un cuadrado mágico?*** • En esta actividad se les dará a los estudiantes una tabla de 3x3 y se les pedirá que formen conjeturas en base a patrones de números encontrados dentro de la tabla. (ver abajo) ***(+) Ejemplo 1 para planes de la lección: Contrastar conjeturas y teoremas*** • En esta actividad los estudiantes identificarán conjeturas y encontrarán contraejemplos (ver abajo).

ETAPA 1 – (Resultados deseados)			**ETAPA 2 (Evidencia)**		**ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)**
Alineación de la Unidad	**Enfoque de Contenido** *(El estudiante comprenderá…)*	**Dominio y Destrezas** *(El estudiante podrá …)*	**Tarea de desempeño**	**Otra evidencia**	**Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección**
		para refutar una conjetura. • Diferenciar entre hipótesis y conjetura. • Identificar y utilizar los postulados básicos sobre puntos, rectas y planos.		es una conjetura? • ¿Hay alguna diferencia entre conjetura e hipótesis? Explica. ***Papelito de entrada (ejemplos rápidos)*** Use la información para orientar la clase del día. • Explica una idea que recuerdes de la clase anterior. • Nombra una idea que no comprendiste de la tarea para hoy. • Explica que fue difícil (o fácil) de la tarea asignada para hoy. ***Papelito de salida (ejemplos rápidos)*** • En la clase de hoy aprendí _______. • Hoy estuve confundido con _______.	

Vocabulario de Contenido	
• Conjeturas • Proposición matemática • Hipótesis • Contraejemplo • Propiedad • Teorema	• Postulado • Demostración • Ejemplos • No-ejemplos • Evidencia • Crítica

ETAPA 1 – (Resultados deseados)			**ETAPA 2 (Evidencia)**		**ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)**
Alineación de la Unidad	**Enfoque de Contenido** *(El estudiante comprenderá…)*	**Dominio y Destrezas** *(El estudiante podrá …)*	**Tarea de desempeño**	**Otra evidencia**	**Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección**
PRCS: **(+)9.G.11.2** **(+)9.G.11.4** **PM:** **PM1** **PM2** **PM3** **PM4** **PM5** **PM6** **PM7** **PM8** **PE/CD:** **PE1/CD1** **PE2/CD2** **PE3/CD3** **T/A:** **T1/A1** **T2/A2**	***Evidencias y demostraciones*** • Como comprobar directamente e indirectamente que una declaración matemática válida es verdadera. • Como desarrollar contraejemplos para refutar las declaraciones inválidas. • Como organizar y presentar directa e indirectamente evidencia usando dos columnas, párrafos y diagramas de flujos.	***Formas geométricas y propiedades*** • Diferenciar entre razonamiento inductivo y razonamiento deductivo. • Utilizar las reglas de lógica para distinguir entre los argumentos válidos y los no válidos. • Desarrollar un contraejemplo para refutar un enunciado inválido. • Organizar evidencia para probar un enunciado matemático. • Evidenciar con argumentos válidos	***El sol saldrá mañana*** • Los estudiantes demostrarán su comprensión de cómo probar una conjetura tanto en formato de párrafo como en formato de diagrama para probar que el sol saldrá mañana (ver abajo) ***Afiche de las pruebas*** • Los estudiantes demostrarán su comprensión de lo que son las pruebas al crear las suyas propias. (ver abajo)	***Preguntas de ejemplo para tarea o prueba corta*** • Dado: $\overline{EA} \cong \overline{CB}$, $\overline{DE} \cong \overline{DC}$, $\overline{DA} \cong \overline{DB}$ Prueba: $\angle 1 \cong \angle 2$  • Dado: ▱ABCD, $\overline{BF} \perp \overline{AE}$, $\overline{CE} \perp \overline{AE}$ Prueba: $\overline{AF} \cong \overline{DE}$  ***Diario de matemáticas (preguntas de ejemplo)*** • Explica cómo el razonar en retroceso a partir de la conclusión de lo que estás tratando de probar puede resultar útil para desarrollar una prueba.	***(+)Prueba por contradicción*** • Esta actividad introductoria explora qué significa probar algo. (ver abajo) ***(+)Pruebas indirectas*** • En esta actividad, los estudiantes aprenderán cómo pueden usarse las pruebas indirectas cuando no son posibles las pruebas directas. (ver abajo) ***(+)Ejemplo 2 para planes de la lección: Pruebas en diagramas de flujo*** • Los estudiantes podrán identificar y aplicar las propiedades de la igualdad y las propiedades de la congruencia. (ver abajo) ***(+)Ejemplo 3 para planes de la lección: Pruebas geométricas en dos columnas*** • Esta lección es una introducción a la idea de que las pruebas geométricas en dos columnas son esencialmente tablas sencillas con una columna para “Enunciados” a la izquierda y una columna de "Razones" a la

ETAPA 1 – (Resultados deseados)			ETAPA 2 (Evidencia)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	**Enfoque de Contenido** *(El estudiante comprenderá…)*	**Dominio y Destrezas** *(El estudiante podrá …)*	**Tarea de desempeño**	**Otra evidencia**	**Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección**
		que un enunciado es cierto o no lo es. • Estructurar o crear pruebas directas e indirectas utilizando dos columnas, párrafos y diagrama de flujo. • Usar las pruebas indirectas cuando no son posibles las pruebas directas.		• ¿Cuáles son los beneficios de usar una prueba de dos columnas? ***Papelito de entrada (ejemplos rápidos)*** Use la información para orientar la clase del día. • Explica una idea que recuerdes de la clase anterior. • Nombra una idea que no comprendiste de la tarea para hoy. • Explica que fue difícil (o fácil) de la tarea asignada para hoy. ***Papelito de salida (ejemplos rápidos)*** • En la clase de hoy aprendí ____. • Hoy estuve confundido con ____.	derecha. (ver abajo)
Vocabulario de Contenido					
• Demostración directa • Demostración indirecta • Válido • Inválido • Proposición condicional • La formula si-entonces • Demostración de dos columnas • Demostración de párrafo • Demostración de diagrama de flujo					

Unidad 9.4: Geometría Euclidiana
Matemáticas
6 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados deseados)			ETAPA 2 (Evidencia)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	**Enfoque de Contenido** *(El estudiante comprenderá…)*	**Dominio y Destrezas** *(El estudiante podrá …)*	**Tarea de desempeño**	**Otra evidencia**	**Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección**
• Deductivo • Contradicción					

ESTADO LIBRE ASOCIADO DE PUERTO RICO
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN

Unidad 9.4: Geometría Euclidiana
Matemáticas
6 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados deseados)			ETAPA 2 (Evidencia)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	**Enfoque de Contenido** *(El estudiante comprenderá…)*	**Dominio y Destrezas** *(El estudiante podrá …)*	**Tarea de desempeño**	**Otra evidencia**	**Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección**
PRCS: **(+)9.G.11.2** **PM:** **PM1** **PM2** **PM3** **PM4** **PM5** **PM6** **PM7** **PM8** **PE/CD:** **PE1/CD1** **PE2/CD2** **PE3/CD3** **T/A:** **T1/A1** **T2/A2**	*Aplicaciones* • Como comprobar directa e indirectamente que una declaración matemática válida es verdadera. • Como desarrollar contraejemplos para refutar las declaraciones inválidas.	***Formas geométricas y propiedades*** • Aplicar los métodos de razonamiento en situaciones matemáticas y en situaciones de la vida diaria. • Desarrollar ejemplos que demuestren que una aseveración es inválida (contraejemplos) en el caso que lo sea. por medio del análisis de varias posibilidades. • Utilizar y aplicar argumentos válidos como definiciones propiedades,	***Embaldosado con cuatro triángulos congruentes*** • En esta tarea los estudiantes deciden sobre patrón de azulejos triangulares para el piso de la cocina. (ver abajo)	***Preguntas de ejemplo para tarea o prueba corta*** • “Si algo es difícil, entonces me hace más fuerte". Selecciona todos los enunciados abajo que signifiquen lo mismo que el de arriba: • Si no es difícil, entonces no me hace más fuerte. • Si me hace más fuerte, entonces es difícil. • Si me hace más fuerte, entonces no es difícil. • Si no me hace más fuerte, entonces es difícil. • Si no me hace más fuerte, entonces no es difícil. • Cuál de los siguientes es un contraejemplo para la proposición condicional: ¿si un polígono tiene más de cuatro lados es entonces un octágono? a. Cuadrado b. Pentágono c. Octágono d. Estrella *Preguntas de ejemplo* • Explicar la diferencia entre conjetura y un contraejemplo. • Proporcionar un contraejemplo a la siguiente proposición: “no todos los triángulos son	*(+)Juego de contraejemplos* • En esta actividad los estudiantes ofrecen conjeturas al encontrar los contraejemplos. (ver abajo)

ETAPA 1 – (Resultados deseados)			ETAPA 2 (Evidencia)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	**Enfoque de Contenido** *(El estudiante comprenderá…)*	**Dominio y Destrezas** *(El estudiante podrá …)*	**Tarea de desempeño**	**Otra evidencia**	**Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección**
		postulados y teoremas en contextos variados. • Observar que el razonamiento deductivo involucra hechos, definiciones, lógica, reglas y propiedades aceptadas para llegar a conclusiones. • Explicar las ventajas del razonamiento deductivo versus el inductivo. • Utilizar el razonamiento deductivo para demostrar teoremas .		obtusos”. Explicar por qué tu ejemplo es un contraejemplo. ***Papelito de entrada (ejemplos rápidos)*** Use la información para orientar la clase del día. • Explica una idea que recuerdes de la clase anterior. • Nombra una idea que no comprendiste de la tarea para hoy. • Explica que fue difícil (o fácil) de la tarea asignada para hoy. ***Papelito de salida (ejemplos rápidos)*** • En la clase de hoy aprendí _______. • Hoy estuve confundido con _______.	

ESTADO LIBRE ASOCIADO DE PUERTO RICO
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN

Unidad 9.4: Geometría Euclidiana
Matemáticas
6 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados deseados)			ETAPA 2 (Evidencia)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	**Enfoque de Contenido** *(El estudiante comprenderá…)*	**Dominio y Destrezas** *(El estudiante podrá …)*	**Tarea de desempeño**	**Otra evidencia**	**Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección**
Vocabulario de Contenido					
• Contraejemplo • Proposición condicional • Contradecir • Conversión • Inversión • Contra- positivo • Proposición equivalente					

ESTADO LIBRE ASOCIADO DE PUERTO RICO
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN

Unidad 9.4: Geometría Euclidiana
Matemáticas
6 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados deseados)			ETAPA 2 (Evidencia)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	**Enfoque de Contenido** *(El estudiante comprenderá…)*	**Dominio y Destrezas** *(El estudiante podrá …)*	**Tarea de desempeño**	**Otra evidencia**	**Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección**
PRCS: **(+)9.G.11.3** **PM:** **PM1** **PM2** **PM3** **PM4** **PM5** **PM6** **PM7** **PM8** **PE/CD:** **PE1/CD1** **PE2/CD2** **PE3/CD3** **T/A:** **T1/A1** **T2/A2**	• Como formular la validez del inverso de una proposición condicional.	***Formas geométricas y propiedades*** • Escribir el inverso de una proposición condicional. • Formular e investigar la validez del inverso de un condicional. • Utilizar las tablas de verdad para determinar la validez de inverso de una proposición condicional.	***Proposiciones válidas e inválidas*** • Los estudiantes crearán un afiche ilustrando las características comunes de proposiciones válidas e inválidas.	***Preguntas de ejemplo para tarea o prueba corta*** • Considera la siguiente proposición: “A menos que vayas a una escuela de medicina, tus padres no serán felices. “ El que tu vayas a la escuela de medicina es: • Una condición necesaria para que tus padres sean felices. • Una condición suficiente para que tus padres sean felices. • No es ni necesario ni suficiente para que tus padres sean felices. • Tanto necesario como suficiente para que tus padres sean felices. • “Tomar el SAT es una condición necesaria para la admisión a la Universidad de Puerto Rico (UPR) es una proposición falsa si: A. Alguien toma el SAT y es aceptado en la UPR. B. Alguien toma el SAT y no es aceptado en la UPR. C. Alguien no toma el SAT y es aceptado en la UPR	***(+)Round Robin*** • En esta actividad los estudiantes crearán proposiciones de equivalencia para valores verdaderos. (ver abajo) ***(+)Lógica y tablas de verdad*** • En grupos de 2-3, haga que los estudiantes desarrollen cinco conjuntos de proposiciones “si-entonces”. Después los estudiantes desarrollan sus propias tablas de verdad de las proposiciones “si-entonces” que crearon y que comprueban su validez. (ver abajo)

ETAPA 1 – (Resultados deseados)			ETAPA 2 (Evidencia)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	**Enfoque de Contenido** *(El estudiante comprenderá…)*	**Dominio y Destrezas** *(El estudiante podrá …)*	**Tarea de desempeño**	**Otra evidencia**	**Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección**
Vocabulario de Contenido					
• Proposición válida • Proposición inválida • Condicional • Lógica • Tabla de verdad • Conjunción • Disyuntiva • Negación • Conjunción • Disyuntiva • Negación	• Bicondicional • Proposiciones con “y” • Proposiciones con “o” • No- proposiciones. • Proposiciones “si-entonces” • Preposiciones “sólo si” • Equivalentes • Argumentos • Premisas • Conclusión				

ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Conexiones a la literatura sugeridas

- **Edwin Abbott**
  - *Planilandia*
- **Kona Macphee**
  - *The Origins of Proof:* http://plus.maths.org/content/os/issue7/features/proof1/index
- **N/A**
  - *What are Mathematical Proofs and Why are they Important?:* http://www.math.uconn.edu/~hurley/math315/proofgoldberger.pdf
- **Kjartan Postkitt**
  - *Murderous Maths - Savage Shapes*

Recursos adicionales

- Página de Discovery Education con una lección de conceptos de geometría que requieren tecnología: http://www.discoveryeducation.com/teachers/free-lesson-plans/concepts-in-geometry.cfm
- La página Cut The Knot tiene información de base y pruebas de ejemplo: http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml
- Instrucciones para escribir pruebas: http://zimmer.csufresno.edu/~larryc/proofs/proofs.html
- Pruebas en diagramas de flujo: http://mdk12.org/instruction/clg/lesson_plans/geometry/FlowChart_223.html
- Las actividades de conjeturas fueron tomadas de: https://www.parcconline.org/sites/parcc/files/PARCC_SampleItems_Mathematics_HSAlgIMathIIMichelleConjecture_081913_Final_0.pdf
- El juego de contraejemplos fue tomado de: http://mathforlove.com/wp-content/uploads/2014/01/Counterexamples.pdf
- Prueba por contradicción de: http://www2.edc.org/makingmath/mathtools/contradiction/contradictionLesson.asp

Tareas de desempeño

Nota: Utilice los documentos: 1) estrategias de educación diferenciada para estudiantes del Programa de Educación Especial o Rehabilitación Vocacional y 2) estrategias de educación diferenciada para estudiantes del Programa de Limitaciones Lingüísticas en Español e inmigrantes (Titulo III) para adaptar las actividades, tareas de desempeño y otras evidencias para los estudiantes de estos subgrupos.

Evaluando conjeturas

- Haga que los estudiantes individualmente escojan una clase cuadriláteros y que identifiquen algunas de las propiedades de las bisectrices del ángulo o las bisectrices perpendiculares de los lados de esas figuras. Con el uso del texto o recursos en la web, pídales que creen 2-3 proposiciones de sus observaciones. Ejemplos de conjeturas pueden incluir:
- Las intersecciones de las bisectrices perpendiculares de un paralelogramo crean un nuevo paralelogramo con las mismas medidas de los ángulos que el original.
- Las bisectrices del ángulo de un rectángulo hacen un cuadrado.
- Todas las bisectrices perpendiculares de trapecio isósceles intersectan en un mismo punto.
- La bisectrices del ángulo de un trapecio isósceles crea cuatro triángulos rectángulos congruentes.
- Cada estudiante entrega su reporte de laboratorio con ejemplos y conjeturas. Para asegurarse de que definen claramente lo que están describiendo, no se les permite usar etiquetas de las figuras y solamente del vocabulario aceptado. La próxima clase, se le entregará a cada uno una hoja con conjeturas sacadas de los reportes. Ellos leerán las conjeturas y tratarán de entenderlas, para generar casos de evaluación y para evaluarlos de acuerdo a las siguientes preguntas.
- ¿Le parece verdadera o falsa la conjetura?
- ¿Es obvio o imperceptible?
- ¿Es fácil o difícil de entender?
- ¿Es una conjetura generalizada?
- ¿Es lo suficientemente específico?

El sol saldrá mañana

- Los estudiantes demostrarán su comprensión de cómo probar una conjetura tanto en formato de párrafo como en formato de diagrama para probar que el sol saldrá mañana.
- Redacta un párrafo en el cual demuestres cómo sabes que el sol saldrá cada mañana.
- Utiliza la misma idea para hacer un diagrama de flujo.
- Considera los enunciados condicionales, la prueba directa e indirecta.
- Evalúa el trabajo de los estudiantes usando la rúbrica de tarea de desempeño (ver anejo: “Organizador– Rúbrica de tarea de desempeño”).

Afiche de las pruebas

- Los estudiantes demostrarán su comprensión de lo que son las pruebas al crear las suyas propias.
- Divide a los estudiantes en parejas. Dale a cada pareja una lista con todos los postulados, teoremas y definiciones cubiertos en la unidad y una cartulina.

- Pídele a cada grupo que cree una imagen visual de sus ideas sobre la creación de sus propias pruebas. No hay cantidad mínima de pruebas, siempre y cuando cubran todos los postulados, teoremas y definiciones en alguna parte. Las parejas no solo establecerán la prueba, sino que también probarán sus conclusiones. Estas pruebas deben presentarse en la cartulina que se les dio. Una vez hechos, se pondrán los afiches en la pared del salón.
- Los grupos serán evaluados en base a lo siguiente:
- Número de definiciones, postulados y teoremas usados.
- Número de definiciones, postulados y teoremas usados correctamente y en el orden correcto.
- Los diagramas están identificados y marcados correctamente.
- Organización de los afiches.
- Número de ideas en el mapa mental.
- Haz que los estudiantes usen la rúbrica con la cual se les evaluará para realizar críticas a sus compañeros (ver anejo: "Organizador- Rúbrica de tarea de desempeño"). Las críticas entre pares serán compartidas con cada grupo inmediatamente después de que hayan terminado.
- El maestro utilizará la misma rúbrica para la evaluación final.

Embaldosado con cuatro triángulos congruentes

- Shannon está ayudando a su madre a decidir qué patrón de azulejos triangulares van a utilizar para la remodelación de la cocina. Usando recortes de colores de papel de construcción, ellas vieron que pueden usar fácilmente triángulos rectángulos (isósceles o escaleno), ya que dos triángulos rectángulos congruentes forman un rectángulo. Shannon pensó si debería usar congruentes agudas o congruentes obtusas las cuales darían un look diferente. Esto la llevo a la pregunta:

  1. ¿Se puede siempre formar un triángulo con cuatro triángulos congruentes? Describe como explorarías esta pregunta.
  2. Si tu respuesta a la # 1 es no, da un contraejemplo.
  3. Si tu respuesta a la # 1 es sí, declara tu conjetura sobre como el triángulo original y sus tres copias están relacionadas al nuevo triángulo.
  4. Si tu respuesta a la # 1 es sí, escribe una demostración que use las transformaciones para justificar tu conjetura.

Proposiciones válidas e inválidas

- Los argumentos están compuestos de declaraciones unidas por la cláusula "si" y "entonces". La propiedad de la argumentación que nos concierne es la validez. Además de los argumentos, también trabajaremos las declaraciones. La propiedad de la categorización de declaraciones que nos concierne es la veracidad o la "verdad". Evaluaremos la validez de los argumentos al preguntar si al aceptar algunas declaraciones como verdaderas (premisas) entonces nos conlleva a aceptar otras declaraciones del argumento (conclusiones) como verdaderas. Cuando este es el caso, podemos decir que el argumento es válido. Cuando este no es el caso, decimos que el argumento es inválido.

Declaración 1:

1.	P, luego Q	Si el presidente comete un acto criminal, entonces él puede ser imputado.	P es suficiente paraQ.
2.	P	El presidente comete un acto criminal	P ocurre
3.	Por lo tanto Q	Por lo tanto él puede ser imputado	Q ocurre

Declaración 2:

1.	P, luego Q	Si el presidente comete un acto criminal, entonces él puede ser imputado.	P es suficiente para Q.
2.	No P	El presidente comete un acto criminal	P no ocurre
3.	Por lo tanto, no Q	Por lo tanto él puede ser imputado	Q no puede ocurrir.

Declaración 3:

1.	P, luego Q	Si el presidente comete un acto criminal, entonces él puede ser imputado.	P es suficiente para Q.
2.	Q	El presidente puede ser imputado.	Q ocurre
3.	Por lo tanto, P	Por lo tanto, el presidente debió haber cometido un acto criminal	P ocurrió

Declaración 4:

1.	P, luego Q	Si el presidente comete un acto criminal, entonces él puede ser imputado.	P es suficiente para Q.
2.	No Q	El presidente puede ser imputado.	Q no ocurre
3.	Por lo tanto, no P	Por lo tanto, el presidente no debió haber cometido un acto criminal.	P no ocurrió

Actividades de aprendizaje sugeridas

La importancia de una examinación crítica

- Comience la lección pidiéndole a los estudiantes que creen una tabla con la primera docena o más de valores de un polinomio cuando $x = 0, 1, 2, 3$ por $x^2 + x + 41$.
- Todos los valores serán impares y primos. Un estudiante notará la secuencia aritmética de las diferencias entre los términos.
- Pregunte a los estudiantes lo siguiente :
  - ¿Creen que este polinomio siempre producirá resultados impares y primos?
  - ¿Qué vas a necesitar ver para estar convencido de una manera o de la otra?
- De manera que los estudiantes vayan extendiendo la tabla, verán que los patrones continúan.
  - ¿Cuántos términos se necesitan para balancearlos?
  - ¿Cómo pueden adoptar activamente un acercamiento escéptico?
  - ¿Pueden buscar activamente los valores de x que no produzca un número impar o primo?
- Deles tiempo para continuar la evaluación del problema. Los primeros cuarenta términos serán primos, pero el polinomio cede un numero compuesto (41.43) cuando $x = 41$.
  - ¿Qué pasa si no aparece un contraejemplo de número impar?
  - ¿Puede que aparezca un contraejemplo después de millones de ejemplos confirmados?
  - ¿Pueden comprobar que el polinomio es siempre impar para los valores de x?

¿Qué es un cuadrado mágico?

- La tabla de abajo es un ejemplo de un cuadrado mágico de 3x3 que tiene nueve casillas. Los estudiantes reconocerán la propiedad espacial en que los lados son iguales en longitud. Cada casilla tiene un número del 1-9. Sin embargo, en la Figura 1, los números en la casilla satisfice las siguientes relaciones:

A	B	C
D	E	F
G	H	I

a+b+c=N
d + e + / = N
8 + h + i = N
a + d + g = N

b + e + h = N
c + f + i = N
a + e + i = N
c + e + g = N

- El patrón es que cuando los números se suman horizontalmente, verticalmente o diagonalmente proporcionan el mismo número. Se les puede proporcionar a los estudiantes preguntas de enfoque tales como: 'consigue el patrón', '¿Qué puedes decir sobre estos números?', o '¿están estos números relacionados de alguna manera?' Alternativamente, se les puede pedir a los estudiantes que coloquen números en las casillas de manera que la relación mencionada anteriormente sea satisfecha. Se podría expandir la formación de conjeturas preguntando a los estudiantes si alguien ha encontrado la relación correcta para mover los números de la primera fila a la segunda/tercera fila (o de la primera columna a la segunda/tercera columna) y explicar el resultado. Una actividad que podría llevar a un pensamiento más crítico es ver si el patrón se mantiene en un cuadrado de 4x4 con un conjunto de números diferentes.

Prueba por contradicción

- Esta actividad introductoria explora qué significa probar algo. Llama a dos estudiantes para que se paren al frente y pídeles que intenten distinguir entre un dólar suyo y el de un compañero a partir de contradicciones. Muéstrale a la clase dos billetes de $1 y uno de $10. Haz que los dos estudiantes cierren los ojos y extiendan una mano para que su compañero(a) pueda ver, pero él o ella no. Dale un billete de $1 a cada uno y esconde el de $10. Diles a los estudiantes que le digan a la clase cuando sepan que tienen el billete de $1 o el de $10. Escribe su razonamiento contiguo a una lista de pasos de una prueba por contradicción.

Pruebas indirectas

- En esta actividad, los estudiantes aprenderán cómo pueden usarse las pruebas indirectas cuando no son posibles las pruebas directas. Para probar de forma indirecta que un enunciado es cierto, se comienza suponiendo que no es cierto. Luego utilizas el razonamiento lógico para demostrar que este supuesto conduce a una contradicción. Si un supuesto conduce a una contradicción, este debe ser falso. Por lo tanto, puedes eliminar la posibilidad de que el enunciado no sea cierto. Esto deja solo una posibilidad abierta, en concreto, ¡que el enunciado es cierto! (ver anejo: "9.4 Actividad de aprendizaje – Pruebas indirectas")

Juego de Contraejemplos

- Los contraejemplos son divertidos y una manera rápida de resaltar como discernir de conjeturas por medio de contraejemplos. El líder (usualmente el maestro, aunque puede ser un estudiante) hace una declaración falsa que puede ser probada de falsa con un contraejemplo. El grupo trata de pensar en un contraejemplo que pruebe que es falso. Al usar preguntas inquisitivas para cuestionar los contraejemplos de los estudiantes. (4-30 jugadores, no material necesario, 10 minutos)
- Usualmente las mejores declaraciones tienen la estructura "Todo ______s son _______" o "Ningún ______s son _______." También puedes jugar/manipular las declaraciones como "Si eso tiene ______, entonces puede ______." Por ejemplo:
  - Todos los pájaros pueden volar. (Contraejemplo: pingüinos)
  - Ningún libro tiene ilustraciones.
  - Todos los libros tienen ilustraciones.
  - Si produce luz, entonces es un bombillo.
  - Si tiene rayas entonces es una cebra.

- (Mas difícil) Ningún perímetro de un cuadrado es igual a su propia área.
- Contraejemplo: un cuadrado 4 por 4
- Ejemplo básico del juego: (puede ser modificado con los términos matemáticos deseados)
  - Maestro: Yo declare que todos los animales tienen cuatro patas. ¿Quién puede pensar en una contraejemplo?
  - Estudiante1: ¡un sapo!
  - Estudiante2: una araña.
  - Estudiante3: Un pescado.
  - Maestro: ¿Por qué el sapo es un contraejemplo?
  - Estudiante4: Porque tiene dos patas.
  - Maestro: cierto. Yo dije que todo animal tiene cuatro patas, pero un sapo es un animal con solo dos patas. Así que debo estar equivocado. Que tal esto: todo que tiene cuatro patas es un animal.
  - Estudiante 5: una araña.
  - Maestro: una araña es un animal con ocho patas, así que prueba que no todo animal tiene cuatro patas. Pero yo declaré que si tienes algo con cuatro patas entonces debe ser un animal. Para probar que estoy equivocado dame algo con cuatro patas que no sea un animal.
  - Estudiante 5: ¿una mesa?
  - Maestro: ¿Quién me puede decir si una mesa es un contraejemplo para mi declaración?
  - Y así sucesivamente.

Round Robin

- Cada estudiante rellenará una tarjeta de la verdad y después intercambiará las tarjetas con otros estudiantes llenando un valor verdadero (1-10) y escribiendo sus iniciales en una de las casillas de otro estudiante. Los estudiantes continuarán intercambiando las tarjetas hasta que las cuatro estén llenas. Una vez acabado, los estudiantes investigarán en grupos.
- En grupo, revise los valores verdaderos para cada declaración. ¿Qué notas?
- Llena los espacios en blanco con tus hallazgos: "El converso y el ___________________________ son declaraciones lógicamente equivalentes porque siempre tienen el mismo valor verdadero"
- "El condicional y el ___________________________siempre tienen el mismo valor verdadero, así que son_________________________ _________________________ ___________________________"

Paso 1: Crea tu propia proposición condicional ("si…entonces…") Decide el valor verdadero de esta declaración: ________ Escribe tus iniciales aquí: ______	Paso 2: Escribe el converso de la proposición condicional: Decide el valor verdadero de esta declaración: ________ Escribe tus iniciales aquí: ______
Paso 3: Escribe el inverso de la proposición condicional: Decide el valor verdadero de esta declaración: ________ Escribe tus iniciales aquí: ______	Paso 4: Escribe el contra positivo de la proposición condicional: Decide el valor verdadero de esta declaración: ________ Escribe tus iniciales aquí: ______

Lógica y tablas de verdad

- En grupos de 2-3, haga que los estudiantes desarrollen cinco conjuntos de declaraciones "si…entonces…". Crea un conjunto de notas que incluya lo que es una tabla de verdad, cómo se usa y un par de ejemplos. Modelo de ejemplo: "Yo estudio por cinco horas o voy a fallar. Yo no estudie por cinco horas así que fallé". Después los estudiantes desarrollan sus propias tablas de verdad de las declaraciones de "si…entonces…" que han creado para ver si son válidas. Los estudiantes después compartirán uno o dos de sus tablas con otros grupos. Entre los grupos se darán comentarios de retroalimentación sobre sus tablas. (ver anejo: "9.4 Actividad de Aprendizaje- Lógica & tablas de verdad para crear un conjunto de notas")

Ejemplos para planes de la lección

Ejemplo 1 para planes de la lección: Contrastar conjeturas y teoremas

- Repase los siguientes 5 pasos para entender conjeturas usando un formato de notas guiadas.

1. Lee las declaraciones más de una vez. Sutilezas importantes pasan desapercibidas en una primera lectura.
2. Identifica cada condición de la conjetura. Las condiciones de la conjetura son aquellos criterios que deben ser satisfechos antes de aceptar las conclusiones de la conjetura. Ellos son los "si" de las declaraciones. Cada sustantivo y adjetivo puede constituir una condición específica.
3. Genera ejemplos y no-ejemplos. Encontrar objetos que satisfagan las condiciones y revisar que ellos también satisfacen la conclusión de la conjetura. Remueve cada condición y construye en su lugar no-ejemplos que satisfacen otras condiciones pero la conclusión. Los no-ejemplos ayudan a entender la importancia de cada condición para la conjetura. Las condiciones contienen los objetos en consideración a un conjunto que son todas propiedades particulares compartidas.
4. Busca contraejemplos. Un contraejemplo satisface todas las condiciones pero no la conclusión. ¿Dejan a las condiciones el suficiente espacio para moverse de un objeto que falla en satisfacer la conclusion de la conjetura? Si existe un contraejemplo, entonces la conjetura es falsa.
5. Compara. ¿Cómo está relacionada esta conjetura a otras declaraciones sobre un objeto matemático similar o igual?

Ejemplo 2 para planes de la lección: Pruebas en diagramas de flujo

- Los estudiantes podrán identificar y aplicar las propiedades de la igualdad y las propiedades de la congruencia, escribir pruebas en diagramas de flujo para organizar argumentos deductivos y validar las propiedades de las figuras geométricas, y explicar los procesos usados. Los estudiantes justificarán los pasos al resolver una ecuación algebraica y las propiedades geométricas en formato de diagrama de flujo. Pídeles a los estudiantes que se dividan en grupos para trabajar los problemas 5, 6 y 7. Cada grupo de estudiantes necesitará un sobre con los enunciados y razones de cada problema recortados en tiras de papel, así como copia de una plantilla de un diagrama de flujo por cada problema. Discutan 1) las ventajas y desventajas de escribir instrucciones para una tarea en un diagrama de flujo, y 2) cómo se utiliza el razonamiento deductivo en los diagramas de flujo. Para materiales, dirigirse a http://mdk12.org/instruction/clg/lesson_plans/geometry/FlowChart_223.html

Ejemplo 3 para planes de la lección: Pruebas geométricas en dos columnas

- Esta lección les da una introducción a los estudiantes a la idea de que las pruebas geométricas en dos columnas son esencialmente tablas sencillas con una columna para "Enunciados" a la izquierda y una columna de "Razones" a la derecha. Los enunciados que haremos serán los pasos que daremos para resolver nuestro problema. Con cada enunciado debemos proveer una razón de por qué el enunciado es cierto. Las razones pueden consistir en información dada dentro del problema mismo, definiciones, postulados o teoremas.

1. Escribe el siguiente enunciado en la pizarra: Todos los cuadrados son rectángulos, pero no todos los rectángulos son cuadrados.
2. Elige estudiantes para que lean cada uno de los siguientes cinco pasos aquí abajo. Después de leer cada paso, haz un modelo de cómo podría usarse cada uno para entender el enunciado que está en la pizarra. Asegúrate de completar cada paso, así como la prueba en dos columnas junto con la clase.
    a. Lee el problema con detenimiento. Escribe la información provista, ya que te ayudará a empezar a solucionar el problema. Anota también la conclusión que debe probarse, pues se trata del paso final de tu prueba. Este paso ayuda a reforzar lo que el problema te está pidiendo que hagas. Te da el paso inicial y final de tu prueba.
    b. Dibuja una ilustración del problema que te ayude a visualizar qué está dado y qué quieres probar. A veces ya habrá un diagrama dibujado por ti; si no, asegúrate de dibujar una ilustración precisa del problema. Haz marcas que te ayuden a ver los ángulos congruentes, los segmentos congruentes, las líneas paralelas u otros detalles importantes.
    c. Utiliza la información dada para ayudarte a deducir los pasos preliminares de tu prueba. Debe incluirse cada paso, independientemente de cuán trivial parezca. Es esencial iniciar tu prueba con un buen primer paso para llegar a la conclusión correcta.
    d. Utiliza la conclusión o argumento que debe probarse para guiarte en la elaboración de los enunciados. Recuerda respaldar tus enunciados con razones, que pueden incluir definiciones, postulados o teoremas.
    e. Una vez hayas llegado a tu solución, si quieres puedes releer la prueba en dos columnas que escribiste para asegurarte de que cada paso tenga una razón. Esto ayuda a poner énfasis en la claridad y eficacia de tu argumento.
3. Una vez el ejemplo esté completo, haz que los estudiantes trabajen en parejas para probar los enunciados A y B. Enunciado A: Dos triángulos congruentes tienen el mismo ángulo interior y exterior. Enunciado B: El Triángulo ABC es un triángulo isósceles. El lado AB es igual al lado AC. Por lo tanto, el ángulo ABC es igual al ángulo ACB.